Espace euclidien

19 février 2019

1 Espaces euclidiens

1.1

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $H = \{(x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^+, \sum_{i=1}^n x_i^2 < t^2\}$; soient $(x,t), (x',t') \in H$ montrer que

$$tt' - \sum_1^n x_i x_i' \geq \sqrt{t^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{t'^2 - \sum_{i=1}^n x_i'^2}$$

1.2

a) Soient u, v et w trois vecteurs normés d'un espace préhilbertien $(E, <,>)$. Montrer que

$$\sqrt{1- < u, w >^2} \leq \sqrt{1- < u, v >^2} + \sqrt{1- < v, w >^2}.$$

b) Soient A et B deux matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que :

$$\sqrt{n^2 - |tr(AB)|^2} \leq \sqrt{n^2 - |tr(A)|^2} + \sqrt{n^2 - |tr(B)|^2}$$

1.3

Soient E un espace vectoriel euclidien, $(X_1, \ldots, X_n) \in E^n$ vérifiant :

$$\forall i \neq j, \; \|X_i - X_j\| \geq 2.$$

Soit B une boule fermée de rayon R contenant les X_i ; montrer que $R \geq \sqrt{2\frac{n-1}{n}}$.

1.4

Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension n, $u_1, .., u_n$ des vecteurs de norme 1, tels que pour $1 \leq i < j \leq n$ on ait $\| u_i - u_j \| = 1$.

a) Etablir que $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E.

b) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ l'orthonormalisée de Schmidt de $(u_1, \ldots, u_n)$.

Montrer qu'il existe des nombres réels $b_1, \ldots, b_{n-1}, a_1, \ldots, a_n$ tels que, pour tout j de $[1, n]$, $u_j = (\sum_{1 \leq i < j} b_i e_i) + a_j e_j$, et les calculer.

1.5

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On se propose de trouver la valeur minimum μ de l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1 + \cdots + a_n x^n)^2 dx$$

lorsque $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$.
a) Montrer que l'inf est atteint ; on pourra introduire le produit scalaire défini sur $\mathbf{R}[X]$ par $< P|Q >= \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.
b) On note a un point où μ est atteint et P le polynôme $1 + \sum_{i=1}^n a_i(X + 1)\cdots(X+i)$, calculer $P(k)$ pour $k = 1, \ldots, n$, déterminer P et en déduire μ.

2 Kit de survie

1 : Considérer le trinôme

$$T(y) = (ty - t')^2 - (x_1 y - x_1')^2 - \ldots - (x_n y - x_n')^2$$

qui tend vers $+\infty$ et prend des valeurs négatives.

2 Projeter v sur le plan engendré par u et w, puis se placer en BON avec $v = e_1$. Calculer. Il y a sans doute mieux, lié à la géométrie hyperbolique.

3. Se ramener au cas où la boule est centrée en 0.

4. a) Regarder la matrice de Gram.
b) Faire soigneusement les trois premiers calculs en réécrivant intelligemment les coefficients, puis récurrence. On trouve $a_i = \sqrt{\frac{i+1}{2i}}$ et $b_i = \frac{1}{\sqrt{2i(i+1)}}$.

3 Groupe orthogonal, projecteurs

3.1

Soient E un eve et x_n une suite génératrice de E. Montrer l'équivalence entre
1) Il existe $u \in O(E)$ tel que, pour tout n, $u(x_n) = x_{n+1}$;
2) Il existe une suite réelle a_k telle que, pour tout couple $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, $< x_{n+k}, x_n >= a_k$.

3.2

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel euclidien E. On note G le groupe formé par les isométries qui sont une bijection de A sur A.
a) On suppose A bornée. Montrer que G ne contient pas de translation non nulle, en déduire l'unicité d'un éventuel centre de symétrie de A.
Désormais E est de dimension trois.
b) Si A est un tétraèdre régulier, montrer que G est isomorphe au groupe des permutations de quatre éléments.
c) Décrire G lorsque A est un cube. On pourra faire opérer les rotations de G sur les grandes diagonales.

3.3

Soient u et v deux rotations $\neq Id$ d'un eve E de dimension trois.
a) Montrer que u et v commutent dans l'un des deux cas suivants, et dans ces cas seulement :
i) u et v ont même axe.
ii) u et v sont deux retournement d'axes orthogonaux.
2) (**) On suppose que u commute avec le commutateur de $(u, v) = uvu^{-1}v^{-1}$ dans le groupe orthogonal, et que $\|u - v\| < 1$. Montrer que u et v commutent.